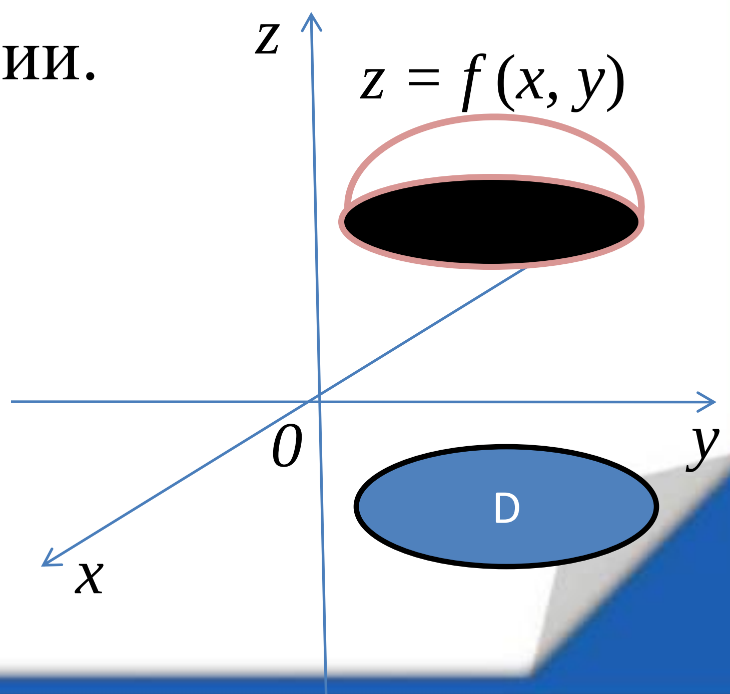
Дифференциальное исчисление функции нескольких переменных

«ЕН.01. ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ»

Основные понятия функции нескольких переменных

- Пусть каждой упорядоченной паре действительных чисел (x, y) из некоторой области $D \subset R_2$ соответствует определенное число z из области $\mathrm{E} \subset R$, тогда функцию $z = f\,(x, y)$ называют функцией двух переменных, где x и y – независимые аргументы (переменные), D – область определения функции,
- Е – множество значений функции.



- Число A называется пределом функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$, что из выполнения условий:

$$0 < |x - x_0| < \delta \quad \text{и} \quad 0 < |y - y_0| < \delta,$$

следует, что $|A - f(x, y)| < \varepsilon$.

Предел функции двух переменных обозначается:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A$$

- Функция $z = f(x, y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0) \in D$, если выполняется условие

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0) = f(M_0).$$

- Функция, непрерывная во всех точках некоторой области называется непрерывной в этой области.

- *Замечание.* Все понятия, которые приведены в этом параграфе для функции двух переменных вводятся аналогично для функции многих переменных.

Частные приращения функции двух переменных $z = f(x, y)$

- Частное приращение по оси *OX*

$$\Delta z_x = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

- Частное приращение по оси *OY*

$$\Delta z_y = f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

Частные производные первого порядка функции двух переменных

- *Определение.* Предел отношения соответствующего частного приращения функции $z = f(x, y)$ к приращению соответствующего аргумента при стремлении этого приращения аргумента к нулю называют частной производной данной функции и обозначают:

$$a)\ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta z_x}{\Delta x} = z'_x = \frac{\partial z}{\partial x};$$

$$\acute{a})\ \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta z_y}{\Delta y} = z'_y = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Способ нахождения частных производных функции $z = f(x, y)$

- Частная производная по переменной x находится в предположении, что:

  x – переменная;

  y – константа (действительное число).

- Частная производная по переменной y находится в предположении, что:

  x – константа (действительное число);

  y – переменная.

Геометрический смысл частных производных

- Геометрический смысл частных производных функции $z = f(x, y)$ формулируется аналогично функции одной переменной, но тангенс угла наклона касательной берется по отношению к соответствующей оси OX или OY.

Физический смысл частных производных

- Частная производная функции $z = f(x, y)$ по соответствующей переменной (x или y) в точке M_0 характеризует скорость изменения этой функции в данной точке в направлении соответствующей оси.

Полный дифференциал первого порядка функций двух и трех переменных

- *Для функции <u>двух</u> переменных* $z = f(x, y)$:

$$dz = z_x' dx + z_y' dy$$

Где ***dx*** и ***dy*** – это дифференциалы переменных;

dz – полный дифференциал функции.

- *Для функции <u>трех</u> переменных* $u = f(x, y, z)$:

$$du = u_x' dx + u_y' dy + u_z' dz$$

Где ***dx*** , ***dy*** , ***dz*** – это дифференциалы переменных;

du – полный дифференциал функции.

Частные производные и полные дифференциалы второго порядка функций двух и трех переменных

Для функции *двух* переменных $z = f(x, y)$

$$z''_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = (z'_x)'_x;$$

$$z''_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (z'_y)'_y;$$

$$z''_{xy} = z''_{yx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (z'_x)'_y$$

$$d^2 z = z''_{xx} d\,x^2 + 2 z''_{xy} d\,x d\,y + z''_{yy} d\,y^2$$

Для функции *трех* переменных $u = f(x, y, z)$:

$$u''_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (u'_x)'_x; \quad u''_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (u'_y)'_y;$$

$$u''_{zz} = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = (u'_z)'_z;$$

$$u''_{xy} = u''_{yx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = (u'_x)'_y;$$

$$u''_{xz} = u''_{zx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = (u'_x)'_z;$$

$$u''_{yz} = u''_{zy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = (u'_y)'_z$$

$$d^2 u = u''_{xx} d\,x^2 + u''_{yy} d\,y^2 + u''_{zz} d\,z^2 +$$
$$+ 2u''_{xy} d\,x d\,y + 2u''_{yz} d\,y d\,z + 2u''_{xz} d\,x d\,z$$

Производные функции нескольких переменных, заданных неявно

$$F(x, y) = 0$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x}{F'_y}$$

$$F(x, y, z) = 0$$

$$z'_x = \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}; \quad z'_y = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

- *Замечание*. Производные второго порядка функции, заданной неявно находятся с помощью <u>последующего дифференцирования равенства, полученных для первой производной по соответствующей переменной.</u>